

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ СТОХАСТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ БИРИТМИЧНОГО ОСЦИЛЛЯТОРА

Новожилова А. А.

ФГАОУ ВО «УрФУ имени первого Президента России Б.Н. Ельцина»,

Екатеринбург, Россия

hana.novojilova@yandex.ru

Аннотация. В работе рассматривается модель биритмичного осциллятора, описывающая когерентные колебания в биологических системах на примере взаимодействия возбужденных и невозбужденных ферментов и молекул субстрата под некоторым химическим и диэлектрическим влиянием в модели мозговых волн. Проводится анализ существования и устойчивости аттракторов детерминированной модели, построены типичные фазовые портреты и бифуркационная диаграмма. Обнаружена зона сосуществования двух устойчивых циклов. Описаны бассейны притяжения этих циклов. Проводится анализ чувствительности аттракторов стохастического варианта модели на основе теории функции стохастической чувствительности. С использованием доверительных областей (полос рассеивания для циклов) изучаются стохастические феномены: переходы типа «цикл \rightarrow цикл» и разрушение осцилляционного режима.

Ключевые слова: модель биритмичного осциллятора, стохастические возмущения, функция стохастической чувствительности, индуцированные шумом переходы.

COMPUTER MODELING AND ANALYSIS OF A STOCHASTIC MODEL OF A BIRYTHMIC OSCILLATOR

Novozhilova A.

Federal State Autonomous Educational Institution of Higher Education «Ural Federal University named after the first President of Russia B.N. Yeltsin», Ekaterinburg,
Russia

Abstract. In this paper a deterministic model of a birhythmic oscillator is considered. The analysis of the existence and stability of the attractors of the model is carried out. Typical phase portraits and a bifurcation diagram are constructed. A zone of coexistence of two stable cycles was found. The basins of attraction of these cycles are described. The sensitivity of attractors of the stochastic version of the model based on the theory of the stochastic sensitivity function was studied. Using confidence confidence bands stochastic phenomena are studied: “cycle \rightarrow cycle” and destruction

of the oscillatory regime.

Key words: birhythmic oscillator model, stochastic perturbations, stochastic sensitivity function, noise-induced transitions.

В данной работе рассматривается нелинейная динамика биологической системы, моделируемая осциллятором Ван-дер-Поля с несколькими предельными циклами, предложенная в работах [1], [2], [3], и [4].

В математической форме модель выглядит следующим образом:

$$\ddot{x} - \mu(1 - x^2 + \alpha x^4 - \beta x^6)\dot{x} + x = \varepsilon\sigma(x, y)\dot{\omega}. \quad (1)$$

Путем замены $y = \dot{x}$ эту модель можно преобразовать к следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = \mu(1 - x^2 + \alpha x^4 - \beta x^6)y - x + \varepsilon\sigma(x, y)\dot{\omega}. \end{cases} \quad (2)$$

Здесь α, β — положительные параметры, отражающие характеристики химического и диэлектрического влияния на ферменты, μ — положительный параметр нелинейности, ω — случайный винеровский процесс, ε — интенсивность вносимого шума. Функция $\sigma(x, y)$ описывает тип вносимого шума: аддитивный или параметрический.

Сначала была исследована динамика детерминированной модели ($\varepsilon = 0$) в зависимости от бифуркационного параметра β при фиксированных значениях параметров $\alpha = 0.1$ и $\mu = 0.1$. Было обнаружено, что у системы всегда существует равновесие $M(0,0)$ и до трех предельных циклов. Для исследования устойчивости равновесия использовался общий аналитический подход, основанный на анализе системы первого приближения. Устойчивость предельных циклов системы определялось с использованием элементов теории Флоке. Было получено, что при всех рассматриваемых значениях β равновесие M является неустойчивым фокусом и вокруг него существует устойчивый предельный цикл с малой амплитудой колебаний. Найдено значение параметра $\beta_1 = 0.002272$, при котором в системе происходит жесткая бифуркация Хопфа — при $\beta \rightarrow \beta_1$ справа в системе рождается полуустойчивый цикл, при уменьшении β он расщепляется на устойчивый и неустойчивый. Определен интервал значений параметра $\beta \in (0, \beta_1)$ на котором в системе сосуществуют два устойчивых цикла.

На **Error! Reference source not found.** представлена сводная бифуркационная диаграмма при изменении параметра β . При построении использовались экстремумы x -координат аттракторов системы. Устойчивый цикл Γ_g , обозначенный зеленым, имеет бесконечно большие размеры при бесконечно малом положительном значении параметра β . При увеличении β цикл уменьшается, в точке бифуркации β_1 сливается с неустойчивым циклом и

оба цикла исчезают. Цикл Γ_b , обозначенный синим, практически не меняет размеров при изменении параметра β . В ходе экспериментов также установлено, что у бассейна притяжения цикла Γ_g есть еще одна, внешняя граница, находясь за которой траектории уходят в бесконечность. На **Error! Reference source not found.** она представлена красной штрихпунктирной линией.

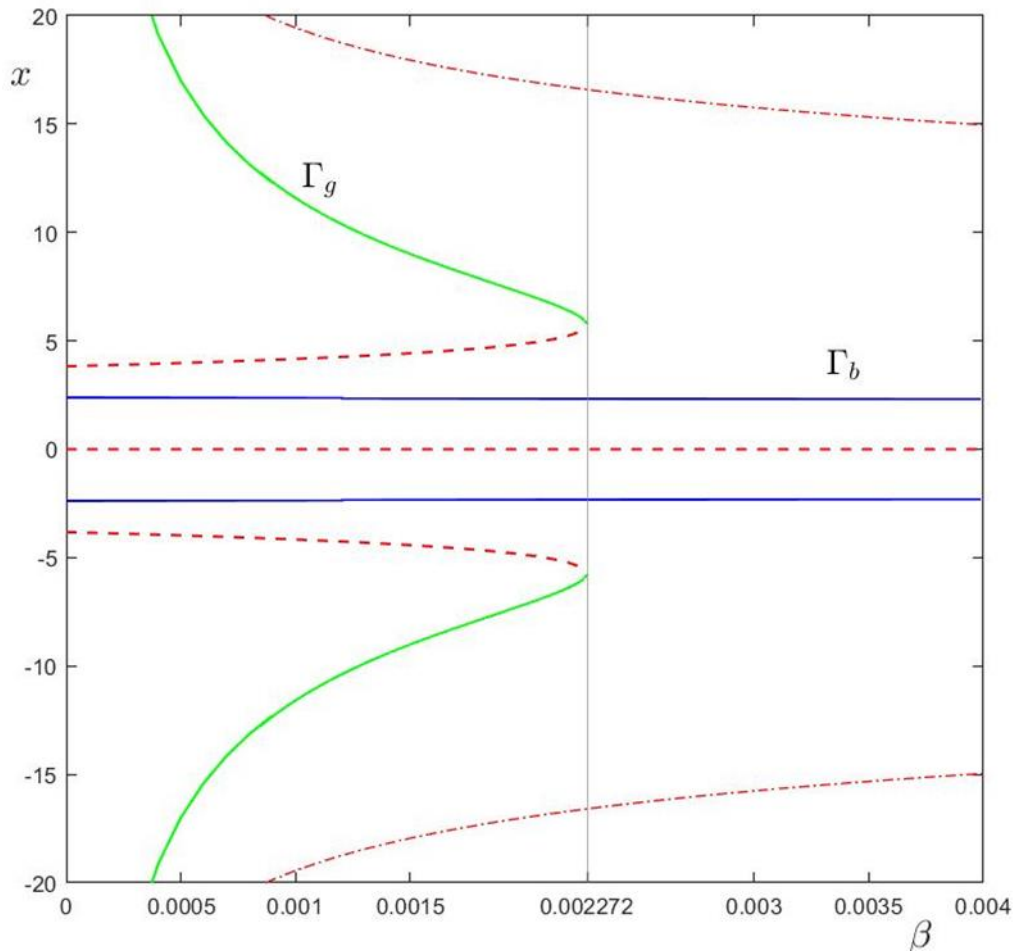


Рисунок 1 – Бифуркационная диаграмма системы (3)

Далее в работе проведен подробный анализ стохастического варианта модели, представленной в виде (1), для разных типов шумов: аддитивный ($\sigma(x, y) = 1$), α -шум ($\sigma(x, y) = \mu x^4 y$), β -шум ($\sigma(x, y) = -\mu x^6 y$) и μ -шум ($\sigma(x, y) = (1 - x^2 + \alpha x^4 - \beta x^6) y$). Используя метод функций стохастической чувствительности (ФСЧ, см. [5], [6], [7]), исследована чувствительность аттракторов к случайному возмущению. Найдены значения функции стохастической чувствительности в случае аддитивного и параметрического шумов. На их основе построены доверительные полосы, которые демонстрируют разброс случайных состояний вокруг детерминированных аттракторов системы. Опираясь на метод доверительных полос, изучены различные феномены, такие как переходы с аттрактора на аттрактор, с аттрактора в равновесие и нарушение осцилляционного режима.

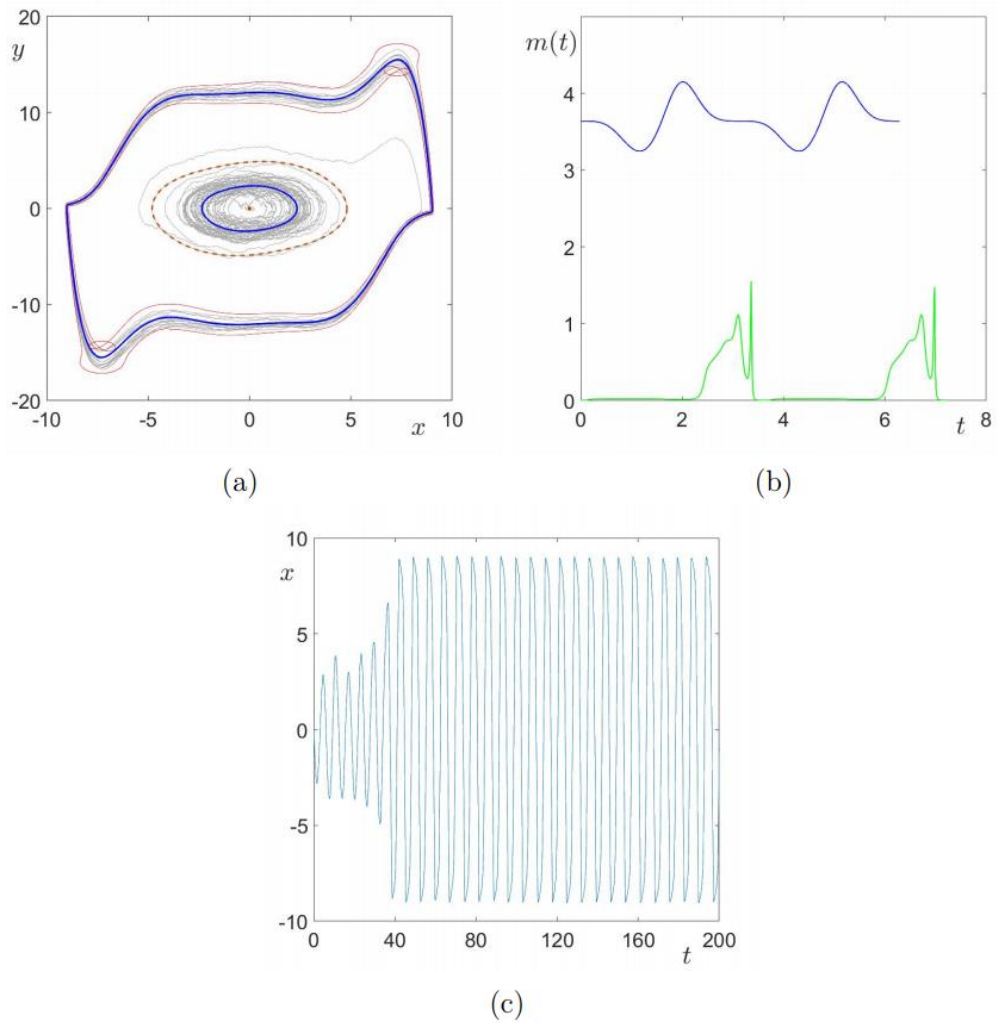


Рисунок 2 – Переход «малый цикл \rightarrow большой цикл» в системе (1) под действием аддитивного шума для $\beta = 0.0015$, $\varepsilon = 0.5$ (a) — фазовый портрет, (b) — ФСЧ, (c) — временной ряд

На **Error! Reference source not found.** представлен феномен перехода с малого цикла Γ_b на большой цикл Γ_g . На **Error! Reference source not found.**a оба устойчивых цикла представлены синим цветом, серым представлены случайные состояния системы, с начальной точкой на малом цикле Γ_b , красным пунктиром — граница бассейнов притяжения циклов (неустойчивый цикл), красной точкой — неустойчивое равновесие M . Граница доверительной области малого цикла совпадает с неустойчивым циклом и случайные состояния попадают в бассейн притяжения большого цикла. На **Error! Reference source not found.**b представлены значения ФСЧ (синий график — для малого цикла, зеленый график — для большого). Легко заметить, что чувствительность малого цикла больше, чем чувствительность большого и для переходов с малого цикла достаточно меньшей интенсивности шума, что согласуется с данными численных экспериментов. Временной ряд на **Error! Reference source not found.**c демонстрирует, как увеличивается амплитуда случайных колебаний.

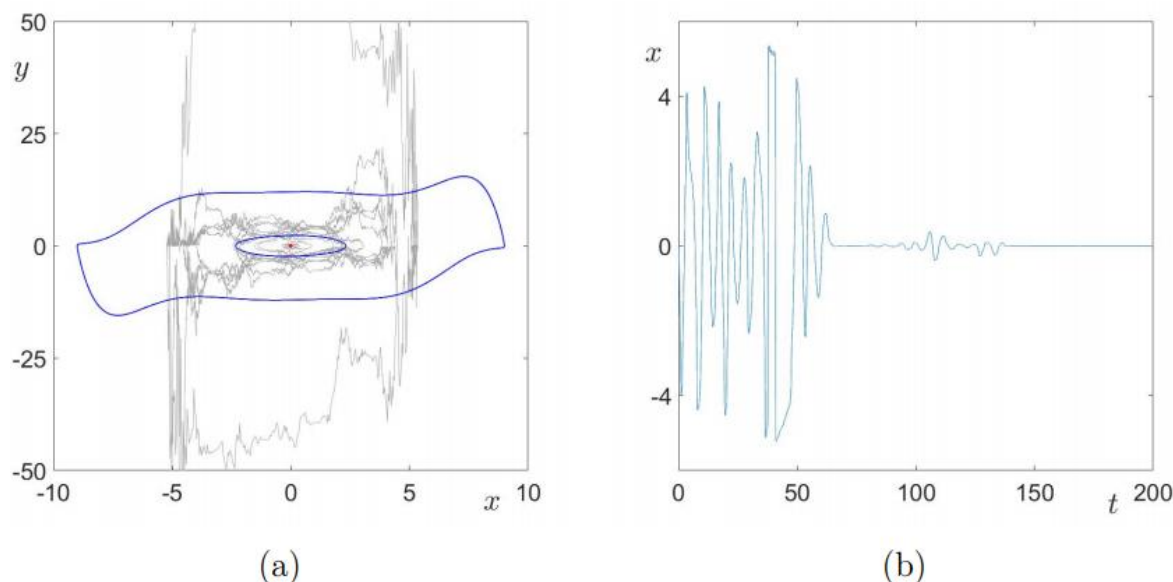


Рисунок 3 – Стабилизация равновесия в системе (1) под воздействием μ -шума для $\beta = 0.0015$, $\varepsilon = 1$ (a) — фазовый портрет, (b) — временной ряд

Error! Reference source not found. иллюстрирует феномен перехода с цикла в неустойчивое равновесие под воздействием μ -шума, называемый также стабилизацией равновесия. Цветовые обозначения те же, что и на **Error! Reference source not found.** По временному ряду, представленному на **Error! Reference source not found.** видно, что амплитуда случайных колебаний уменьшается, а потом и вовсе становится равной нулю. Чем выше интенсивность шума ε , тем быстрее случайные состояния системы стабилизируются в неустойчивое равновесии M .

Библиографический список

1. Kadji H.G.E., Orou J.B.C., Yamapi R., Woafu P., Nonlinear dynamics and strange attractors in the biological system // Chaos, Solitons and Fractals. 32(2) (2007), pp
2. Yamapi R., Mbakob Yonkeu R, Filatrella G., Tchawoua C., Effects of noise correlation on the coherence of a forced van der Pol type birhythmic system. // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2018.
3. Mbakob Yonkeu R., Yamapi R., Filatrella G., Kurths J., Can Lévy noise induce coherence and stochastic resonances in a birhythmic van der Pol system? // The European Physical Journal. 93: 144 (2020).
4. Mbakob Yonkeu R., Yamapi R., Filatrella G., Tchawoua C., Stochastic bifurcations induced by correlated noise in a birhythmic van der Pol system. // Commun NonlinearSciNumerSimulat. 33 (2016), pp. 70–84.
5. Башкирцева И.А., Ряшко Л.Б., Метод квазипотенциала в

исследовании локальной устойчивости предельных циклов к случайным возмущениям. // Изв. вузов. Прикл. нелинейная динамика, 2001 Т. 9. № 6. С. 104-114.

6. Bashkirtseva I.A., Ryashko L.B., Sensitivity analysis of stochastic attractors and noise-induced transitions for population model with Allee effect // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. 21(4) (2011).

7. Мильштейн Г.Н., Ряшко Л.Б., Первое приближение квазипотенциала в задачах об устойчивости систем со случайными невырожденными возмущениями. // Прикл. математика и механика, — Т. 59, No. 1, 1995. — С. 53–63.